MECCANICA II

PROF. ENRICO CIULLI

ING. BIOMEDICA
2014/2015

ALESSIO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MECCANICA II

DINAMICA
- equazioni fondamentali
- dinamica delle macchine
- dinamica dei sistemi vibranti
  - 1 g.l.
  - 2 g.l.

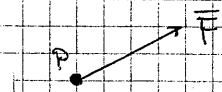
MECCANICA dei CONTATTI
- a SECCO
- LUBRIFICATI

Richiami di base di dinamica

la dinamica si basa sulla legge di Newton: $\underline{F} = m\underline{a}$

FORZE

- **punto materiale**



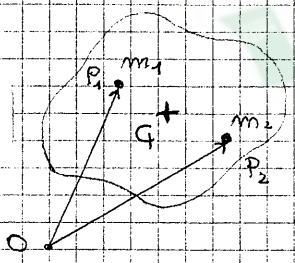
$\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{F} - m\bar{a} = \bar{0}$

$\bar{F} + \bar{F}_i = \bar{0}$ con: $\boxed{\bar{F}_i = -m\bar{a}}$ → FORZA d'INERZIA

quantità di moto: $\bar{Q} = m\bar{v}$

$\dot{\bar{Q}} = m\dot{\bar{v}} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{F}_i = -\dot{\bar{Q}}$

- **sistema di masse**



$m = \sum_{j=1}^{n} m_j$

$\bar{F}_i = -\sum_{j=1}^{n} m_j \bar{a}_j$

conviene scrivere l'equazione rispetto al baricentro G:

$\overline{OG} = \dfrac{\sum OP_j\, m_j}{m_{TOT}}$ → posizione del baricentro

notazione: $\bar{V}_j = \bar{V}_{P_j}$

derivando rispetto al tempo:

$\bar{V}_G - \bar{V}_O = \dfrac{\sum m_j(\bar{V}_j - \bar{V}_O)}{m} = \dfrac{\sum m_j \bar{V}_j}{m} - \dfrac{\sum m_j}{m}\bar{V}_O = \dfrac{\sum m_j \bar{V}_j}{m} - \bar{V}_O$ (m costante)

$\Rightarrow \bar{V}_G = \dfrac{\sum m_j \bar{V}_j}{m}$ → velocità del baricentro $\Rightarrow m\bar{V}_G = \sum m_j \bar{V}_j \rightarrow \bar{Q}$

$\bar{Q} = m\bar{V}_G \xrightarrow{\text{derivo}} \sum m_j \bar{a}_j = m\bar{a}_G$

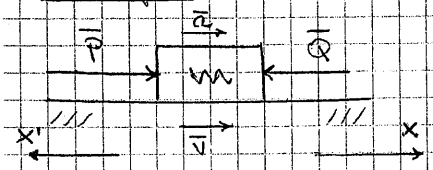
$\Rightarrow \boxed{\bar{F}_i = -m\bar{a}_G} = -\dot{\bar{Q}}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\Rightarrow$ $\boxed{\sum \bar{F}^{est} + \bar{F}_i = 0}$ $\rightarrow$ equazione di d'Alembert

risultante delle forze

esempio



$\bar{P} + \bar{Q} - m\bar{a} = 0$

proiettando lungo x: $x: \; P - Q - m\ddot{x} = 0$

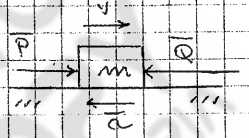
proiettando lungo x': $x': \; -P + Q - m\ddot{x} = 0$

$\rightarrow$ il segno rimane lo stesso anche se l'asse x' è diverso opposto ad x.

$P - Q = m\ddot{x}$

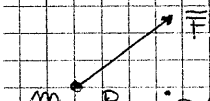
se: $P > Q \Rightarrow \ddot{x} > 0$ (il corpo accelera)

se: $P < Q \Rightarrow \ddot{x} < 0$ (il corpo decelera)



MOMENTI

- punto materiale



$\bar{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \bar{F}$

$\bar{M}_{iO} = -\overrightarrow{OP} \times m\bar{a}_P$ $\rightarrow$ momento della forza d'inerzia

momento della quantità di moto: $\bar{K}_O = \overrightarrow{OP} \times m\bar{V}$

- sistema di masse

$\boxed{\bar{M}_{iO} = -\sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{OP_j} \times m_j \bar{a}_j}$ $\rightarrow$ momento delle forze d'inerzia rispetto al polo O.

$\bar{K}_O = \sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{OP_j} \times m_j \bar{V}_j$ derivo rispetto al tempo:

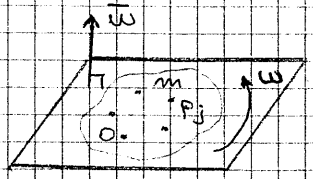
$\dot{\bar{K}}_O = \sum (V_j - V_O) \times m_j \bar{V}_j + \sum \overrightarrow{OP_j} \times m_j \bar{a}_j =$ con: $(V_j \times m_j V_j) = 0$

$= -\bar{V}_O \times \sum m_j \bar{V}_j - \bar{M}_{iO}$

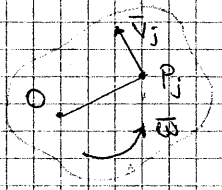
$\Rightarrow$ $\boxed{\bar{M}_{iO} = -\dot{\bar{K}}_O - \bar{V}_O \times \bar{Q}}$ $\rightarrow$ si annulla quando: $\begin{cases} \bar{V}_O = 0 \\ O \equiv G \end{cases} \Rightarrow \bar{M}_{iO} = -\dot{\bar{K}}_O$

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 9837745

scrivo un'espressione alternativa per $\bar{K}_o$ utilizzando la relazione che c'è tra la $\bar{v}$ di due punti:



$$\bar{v}_j = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \vec{OP_j}$$



$$\bar{K}_o = \sum \vec{OP_j} \times m_j (\bar{v}_o + \bar{\omega} \times \vec{OP_j}) =$$

$$= \sum \vec{OP_j} \times m_j \bar{v}_o + \sum m_j (\vec{OP_j} \cdot \vec{OP_j}) \cdot \bar{\omega} - \underbrace{\sum m_j (\vec{OP_j} \cdot \bar{\omega}) \vec{OP_j}}_{\text{è nullo}} =$$

$$= \sum \vec{OP_j} \times \bar{v}_o m_j + \left(\sum m_j \vec{OP_j}^2\right) \bar{\omega}$$

$\rightarrow J_o =$ momento d'inerzia rispetto ad O

$$\Rightarrow \boxed{\bar{K}_o = m \vec{OG} \times \bar{v}_o + J_o \bar{\omega}}$$

poiché: $\vec{OG} = \frac{\sum \vec{OP_j} m_j}{m}$

derivando:

$$\dot{\bar{K}}_o = m(\bar{v}_G - \bar{v}_o) \times \bar{v}_o + m \vec{OG} \times \bar{a}_o + J_o \dot{\bar{\omega}} =$$

$$= \underbrace{m \bar{v}_G}_{\bar{Q}} \times \bar{v}_o + m \vec{OG} \times \bar{a}_o + J_o \dot{\bar{\omega}}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

dunque:

$$\bar{M}_{io} = -\dot{\bar{K}}_o - \bar{v}_o \times \bar{Q} = -\cancel{\bar{Q} \times \bar{v}_o} - m \vec{OG} \times \bar{a}_o - J_o \dot{\bar{\omega}} - \cancel{\bar{v}_o \times \bar{Q}}$$

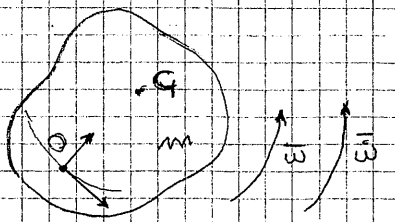
$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{io} = -J_o \dot{\bar{\omega}} - m \vec{OG} \times \bar{a}_o}$$

si annulla: $\begin{cases} G \equiv O \\ a_G = 0 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\bar{M}_{io} = -J_G \dot{\bar{\omega}}}_{\text{nel caso piano}}$

$$\bar{M}_{io} = \underbrace{-J_G \dot{\bar{\omega}}}_{\text{momento delle forze d'inerzia rispetto al baricentro}} - \vec{OG} \times m \bar{a}_G$$

$$J_o = J_G + m OG^2$$

$$a_o = a_G + \dot{\bar{\omega}} \times \vec{GO} - \omega^2 \vec{GO}$$



$$\bar{M}_{io} = -(J_G + m OG^2) \dot{\bar{\omega}} - \vec{OG} \times m (a_G + \dot{\bar{\omega}} \times \vec{GO} - \omega^2 \vec{GO})$$

$$= -J_G \dot{\bar{\omega}} - \cancel{m OG^2 \dot{\bar{\omega}}} - \left[\vec{OG} \times m a_G - m(\vec{OG} \cdot \dot{\bar{\omega}}) \vec{GO} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{m(\vec{OG} \cdot \vec{GO}) \dot{\bar{\omega}}}_{-m \vec{OG}^2 \dot{\bar{\omega}}} - \vec{OG} \times m \omega^2 \vec{GO}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{io} = -J_G \dot{\bar{\omega}} - \vec{OG} \times m a_G}$$